

# Erfolge der Mathematik bei der Verbindung von Grundlagen- und angewandter Forschung

K. Kunisch

Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen  
Karl - Franzens - Universität Graz

mit

K. Bredies, C. Clason, S. Keeling Universität Graz

G. Plank, Medizinische Universität Graz

R. Stollberger, Technische Universität Graz

Baden, Juni 2012



# Hochofen 1



# Hochofen 2



# Hochofen 3



# "Modellierung - Inverses Problem"

► Modell:

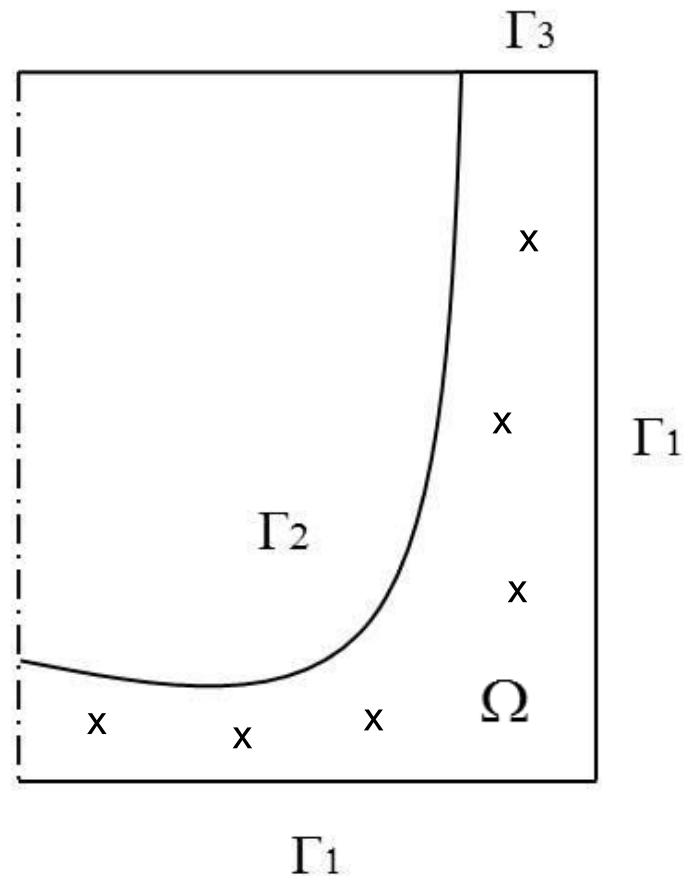
$$- \operatorname{div} (\lambda(u, x) \nabla u) = 0$$

► Randbedingungen:

$$- \lambda \frac{\partial u}{\partial n} = \alpha_0 (u - T_0) \quad \Gamma_1$$

$$- \lambda \frac{\partial u}{\partial n} = \alpha_1 (u - T_1) \quad \Gamma_2$$

$$- \lambda \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \Gamma_3$$



wobei  $\alpha, \lambda, T_0, T_i, \Gamma_1$  and  $\Gamma_3$  bekannt, **aber  $\Gamma_2$  unbekannt.**

# "Modellierung - Inverses Problem"

► Modell:

$$- \operatorname{div} (\lambda(u, x) \nabla u) = 0$$

► Randbedingungen:

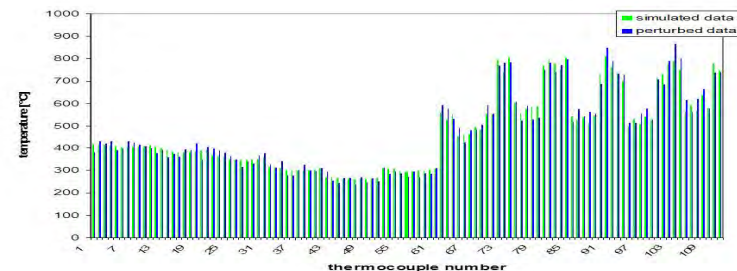
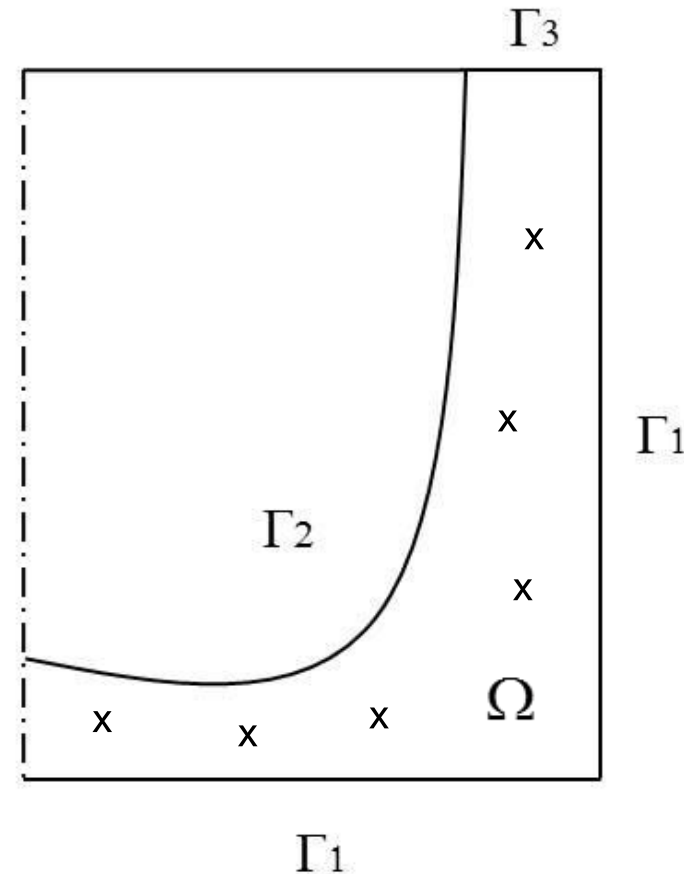
$$- \lambda \frac{\partial u}{\partial n} = \alpha_0 (u - T_0) \quad \Gamma_1$$

$$- \lambda \frac{\partial u}{\partial n} = \alpha_1 (u - T_1) \quad \Gamma_2$$

$$- \lambda \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \Gamma_3$$

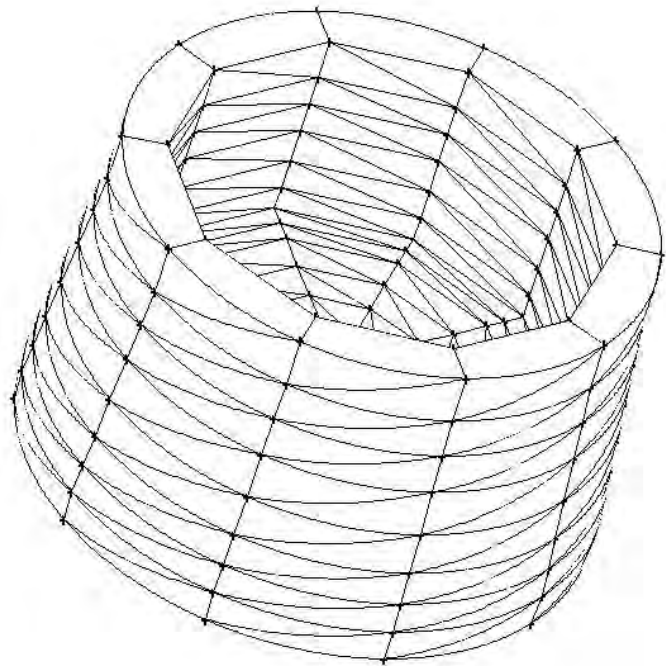
wobei  $\alpha, \lambda, T_0, T_i, \Gamma_1$  and  $\Gamma_3$  bekannt, **aber  $\Gamma_2$  unbekannt.**

trial and error, - oder ...

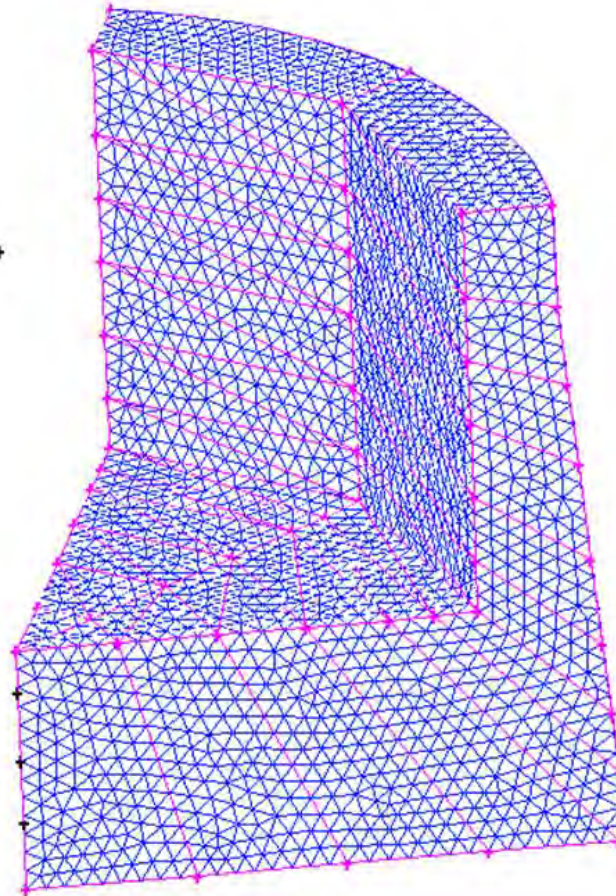


courtesy Dr. Binder

# Scientific Computing



+



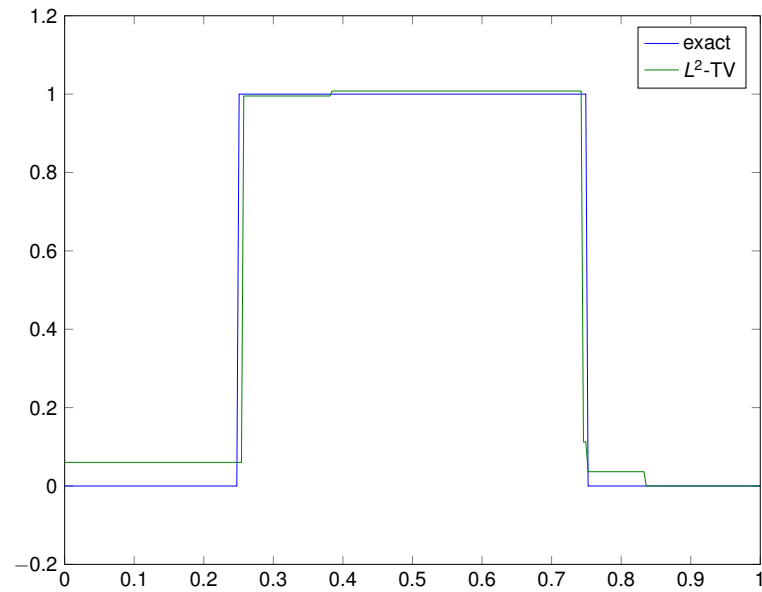
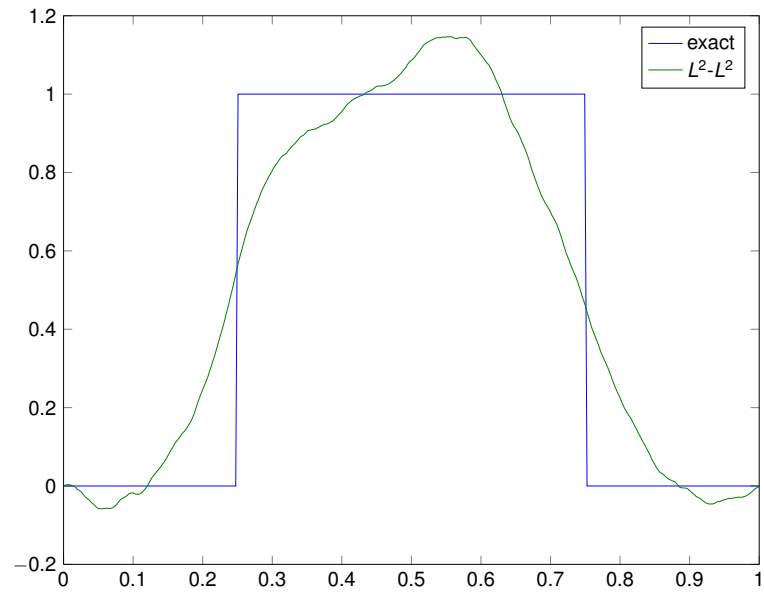
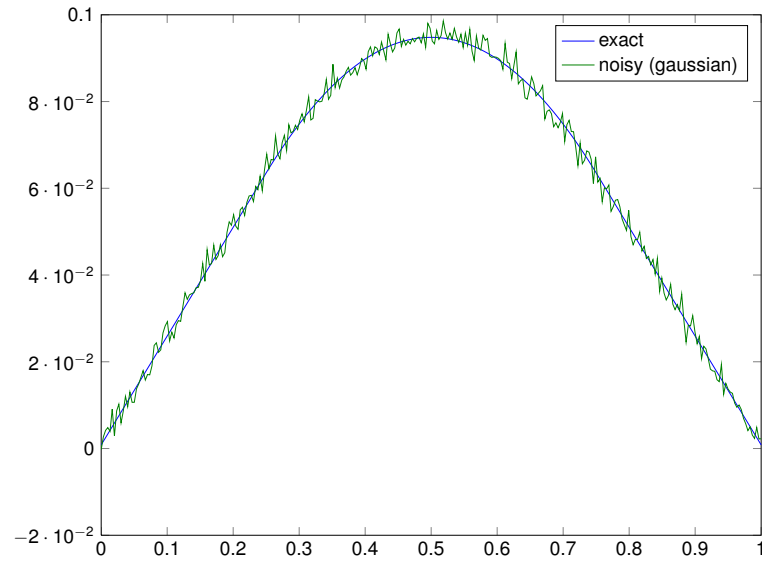
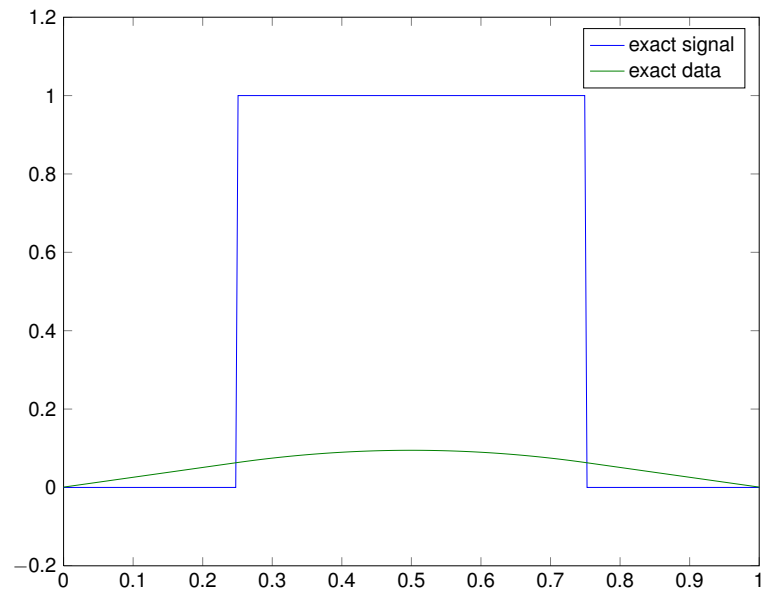
# Inverses Problem - Optimierung

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\Gamma_2} \frac{1}{2} \int_0^T \sum_i |u(x_i, t) - z_i(t)|^2 + \alpha \text{ Regularisierung } (\Gamma_2) \\ \text{Modellgleichung} \end{array} \right.$$

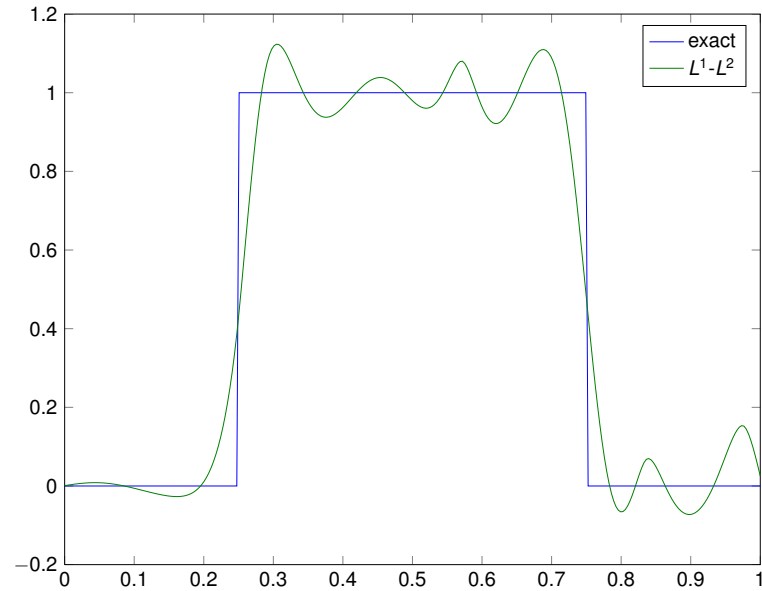
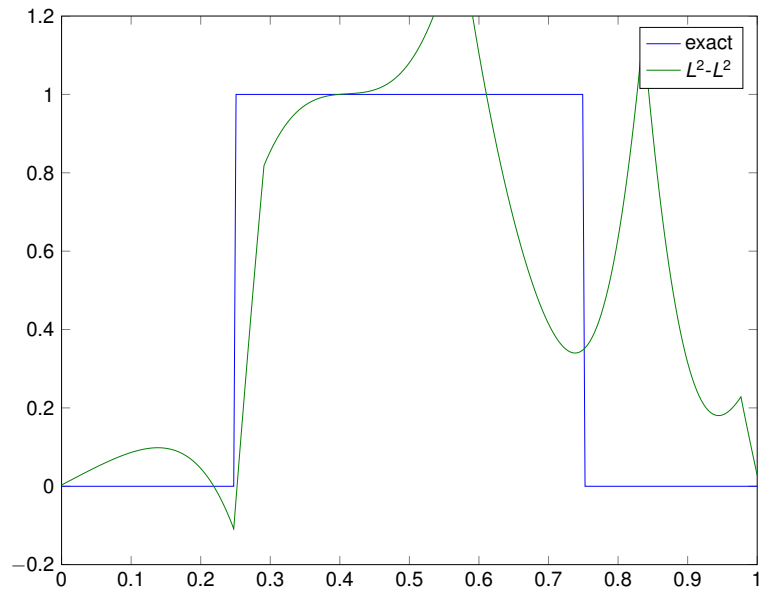
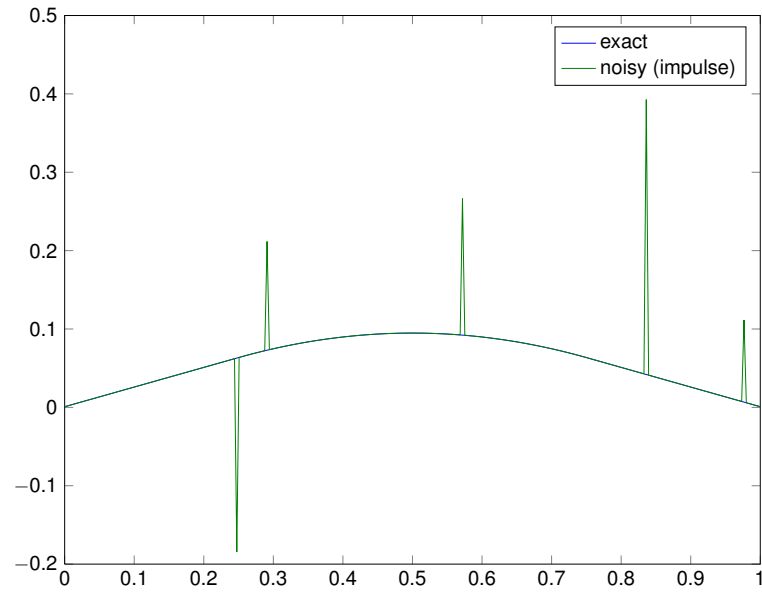
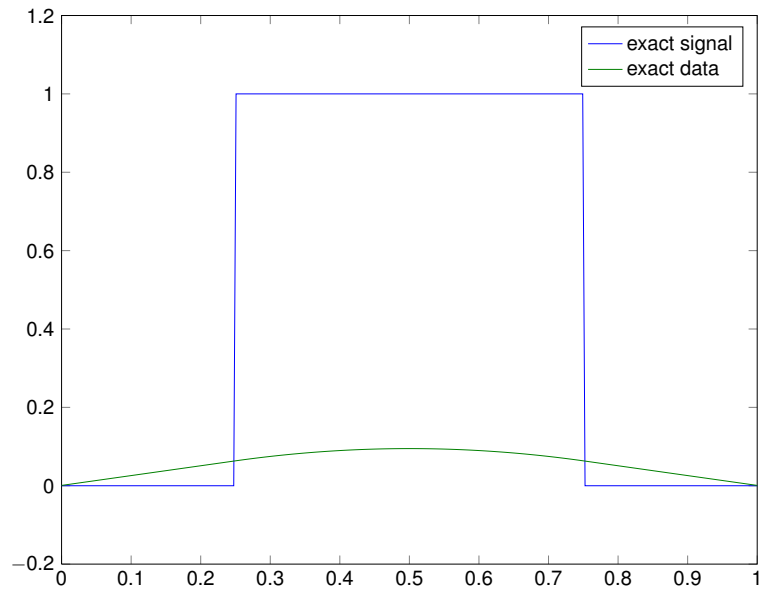
- ▶ Differentiation bezüglich Geometrie
- ▶ Regularisierung
- ▶ Gaußian fit to data
- ▶ Verlässlichkeit - Statistik.



# Filtering

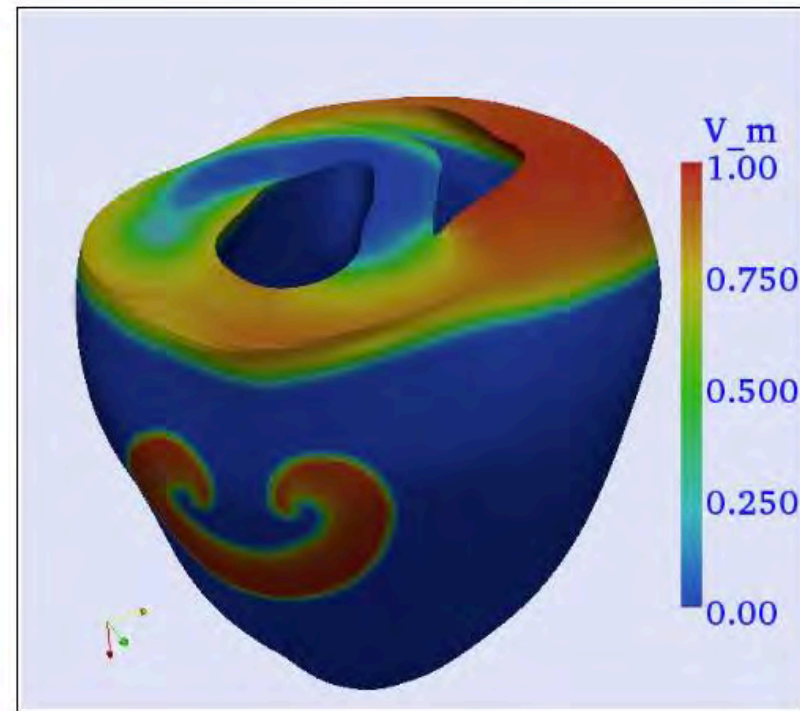
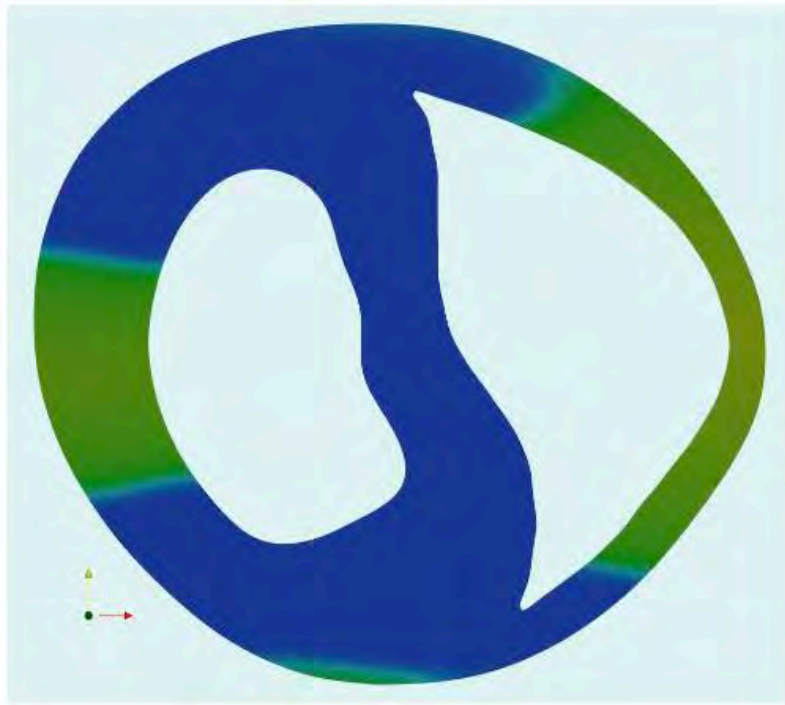


# Filtering



Mathematik in Verbindung mit  
Physik und  
Ingenieurwissenschaften,  
ja aber ...

# Kontrolle der elektrischen Aktivität des Herzens



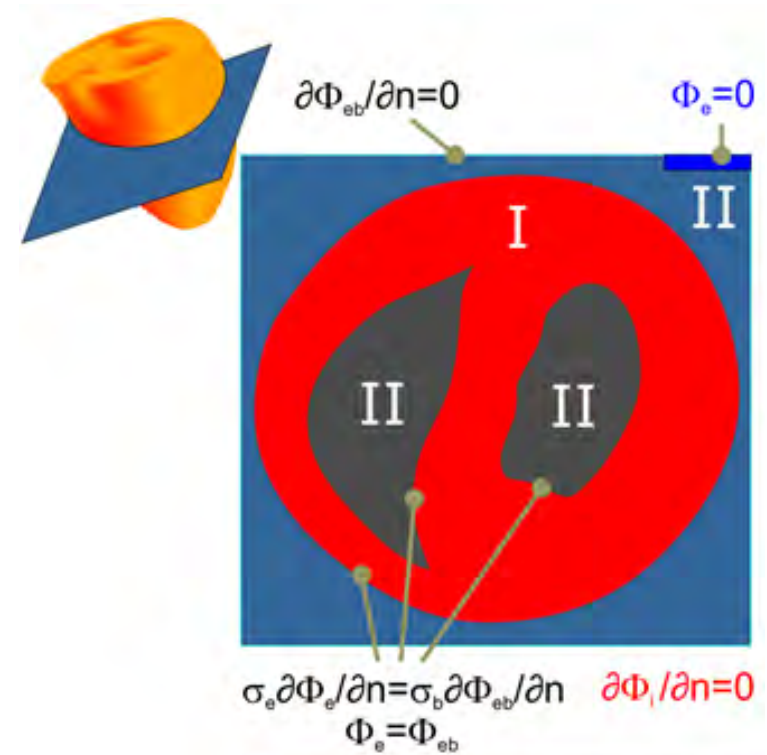
(Ch. Nagaiah, Mesh provided by Anton Prassl and Gernot Plank).

Ziel: Verständnis und Beeinflussung von Arrhythmien

## Bidomain Gleichungen

$$\text{I} \begin{cases} -\nabla \cdot (\bar{\sigma}_i \nabla \Phi_i) = -\beta I_m \\ -\nabla \cdot (\bar{\sigma}_e \nabla \Phi_e) = \beta I_m \end{cases}$$

$$\text{II} \begin{cases} -\nabla \cdot (\bar{\sigma}_b \nabla \Phi_e) = I_e \end{cases}$$

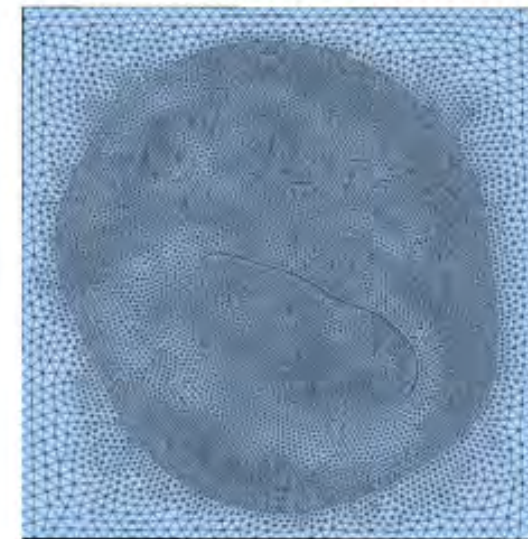


## Membran Kinetik

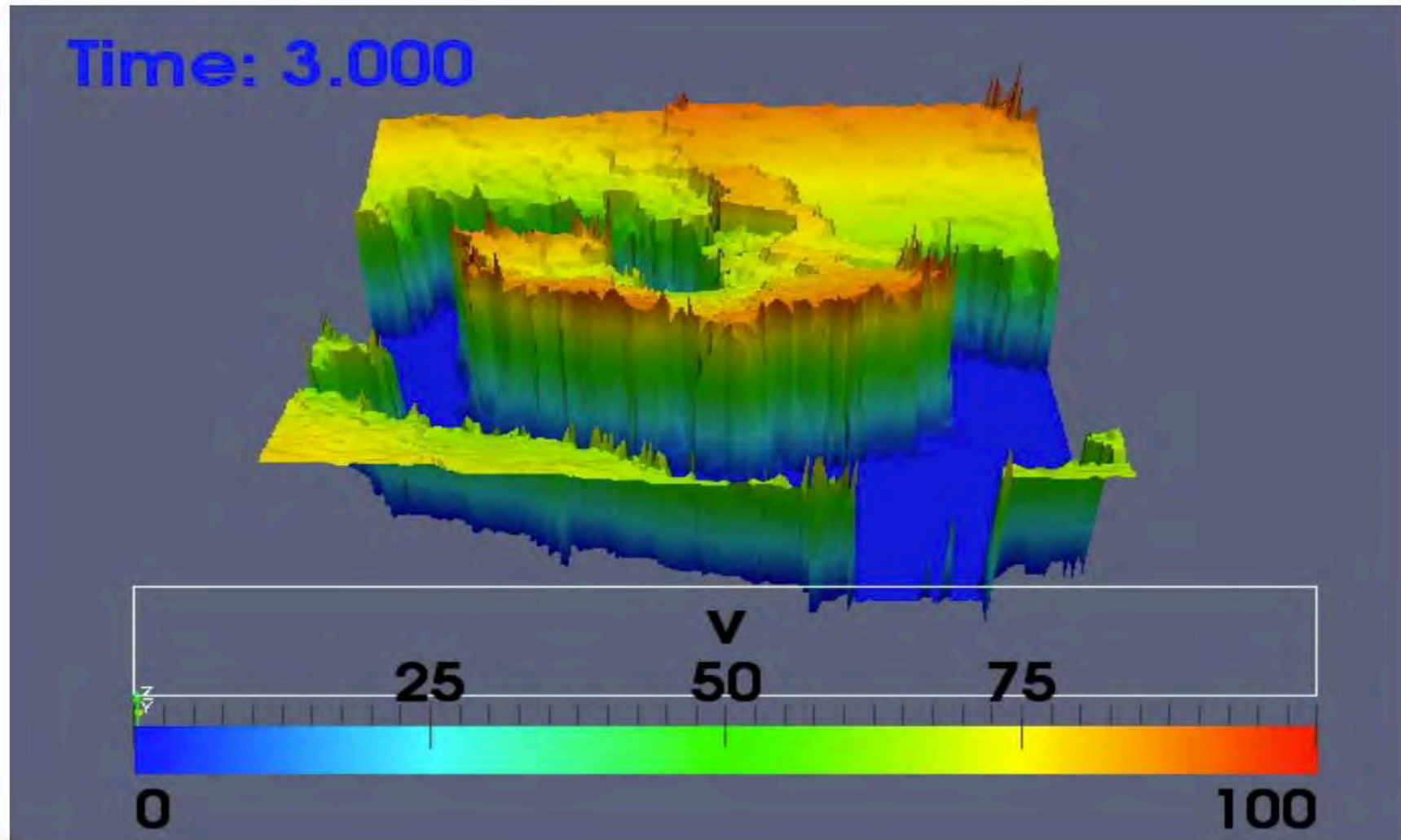
$$I_m = C_m \frac{\partial V_m}{\partial t} + I_{ion}(V_m, \vec{\eta}) - I_{tr}$$

$$\frac{\partial \vec{\eta}}{\partial t} = g(V_m, \vec{\eta})$$

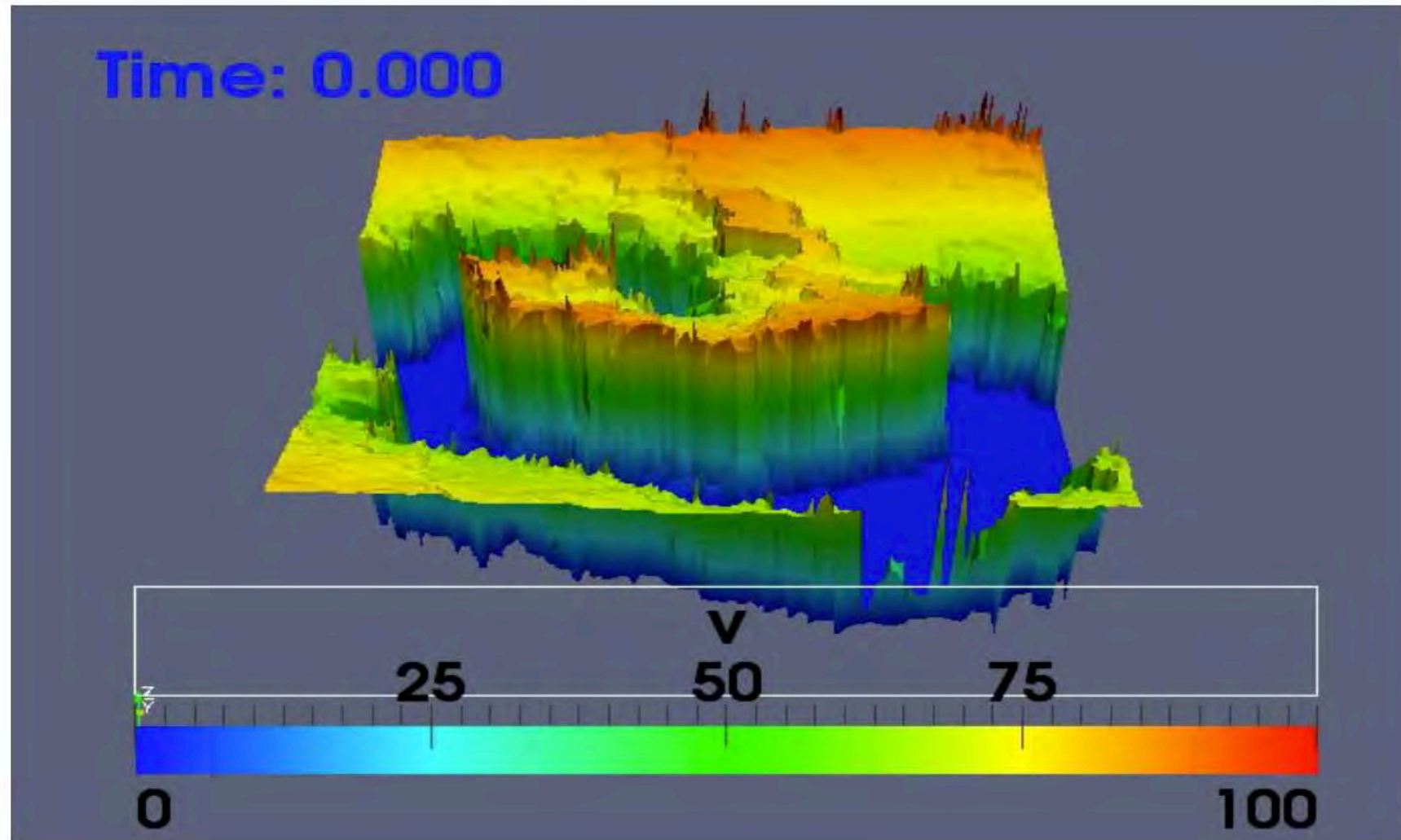
$$V_m = \Phi_i - \Phi_e$$



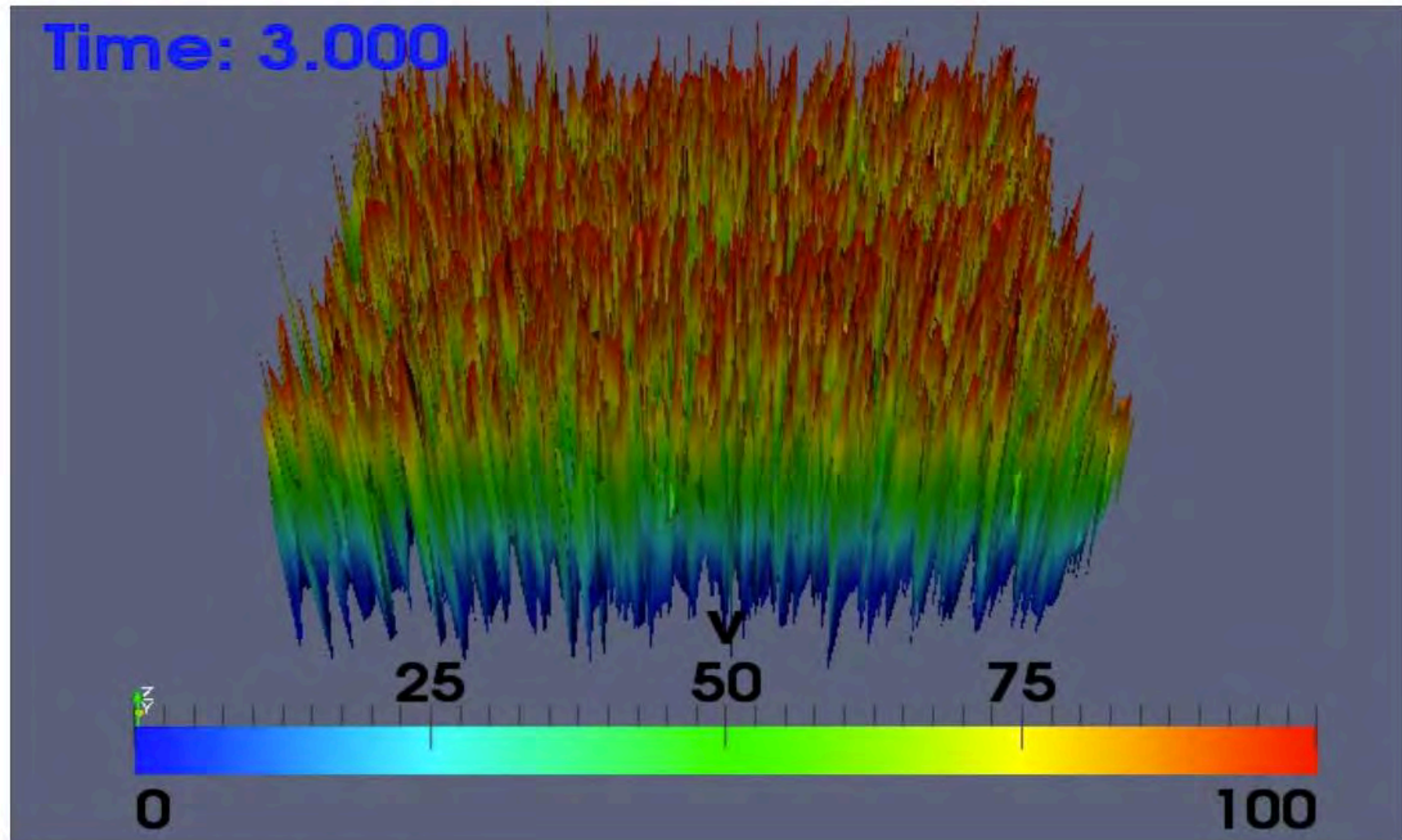
# Uncontrolled $v$ solution



# During the shock: optimal state solution



# Post shock: optimal state solution



Measure of success:



# Inhalt

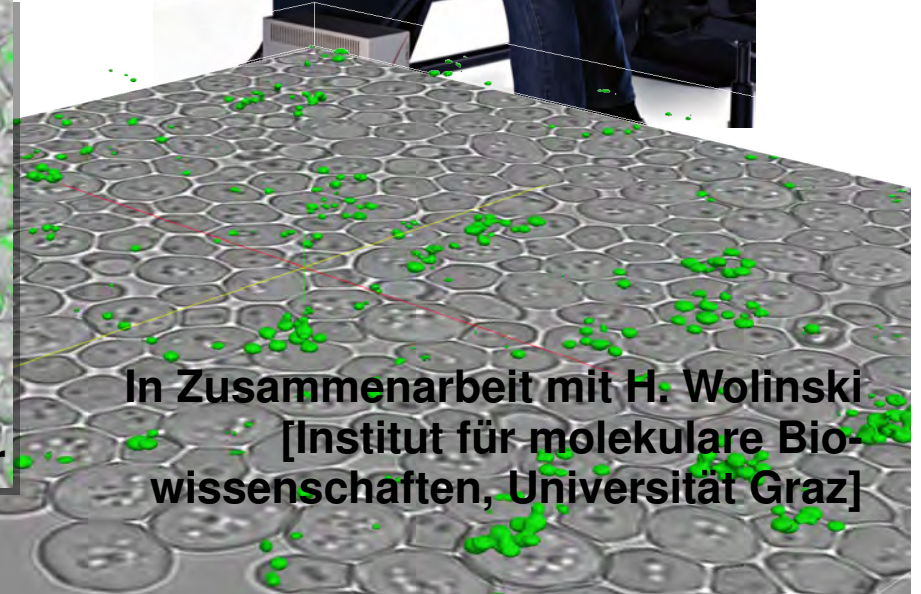
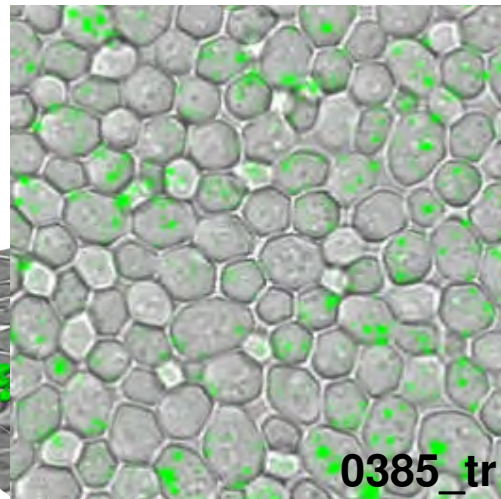
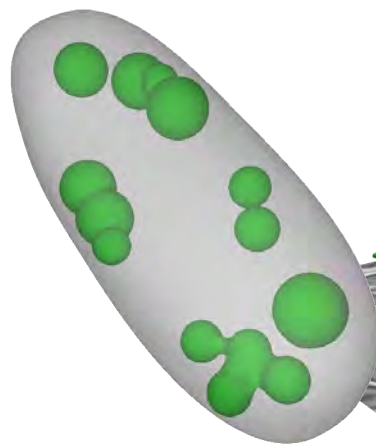
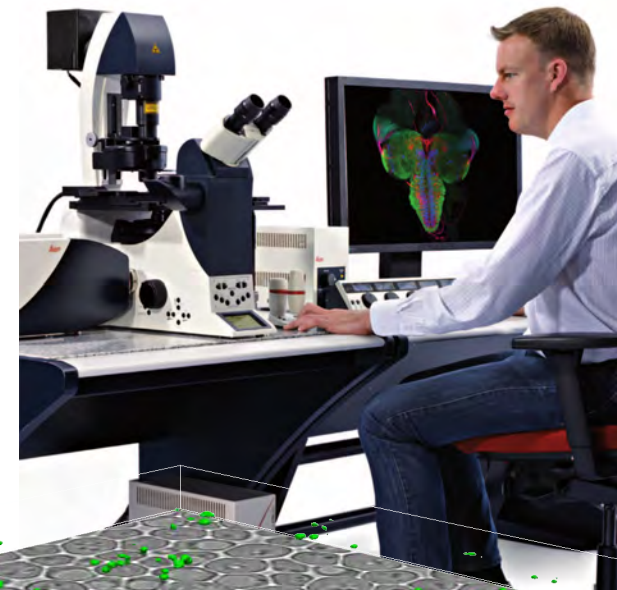
- ▶ Hochofenausmauerung
- ▶ Elektrische Aktivität des Herzens
- ▶ Hefezellensegmentierung
- ▶ Bildverarbeitung in der Medizin
- ▶ Europäisches Weltraumteleskop
- ▶ Diskussion

# Segmentierung von Durchlichtmikroskopiedaten

## Metabolismus der Hefe *Saccharomyces cerevisiae*

- ▶ 3D-Fluoreszenzmikroskopie  
~> Lipid-Droplets (Fetttröpfchen)
- ▶ 2D-Durchlichtmikroskopie  
~> Zellbegrenzungen  
(nicht invasiv)

**Ziel:** Zellbasierte quantitative Analyse  
Dazu: Detektion der Zellgrenzen

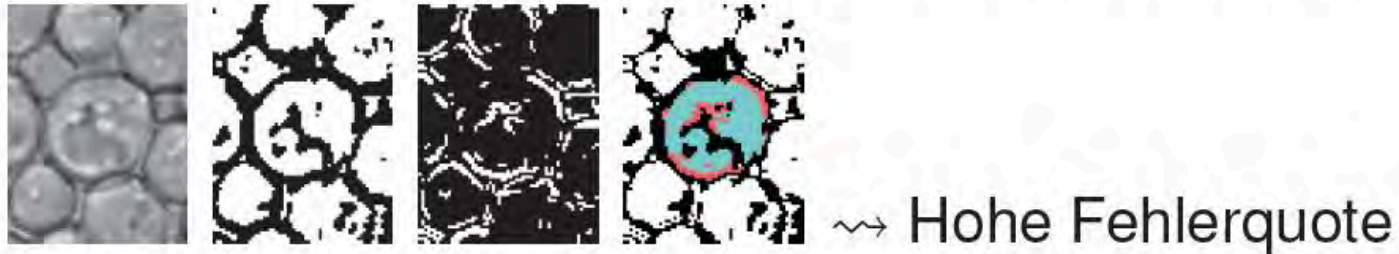


In Zusammenarbeit mit H. Wolinski  
[Institut für molekulare Bio-  
wissenschaften, Universität Graz]

# Anwendung der mathematischen Bildverarbeitung

## Standard-Modell

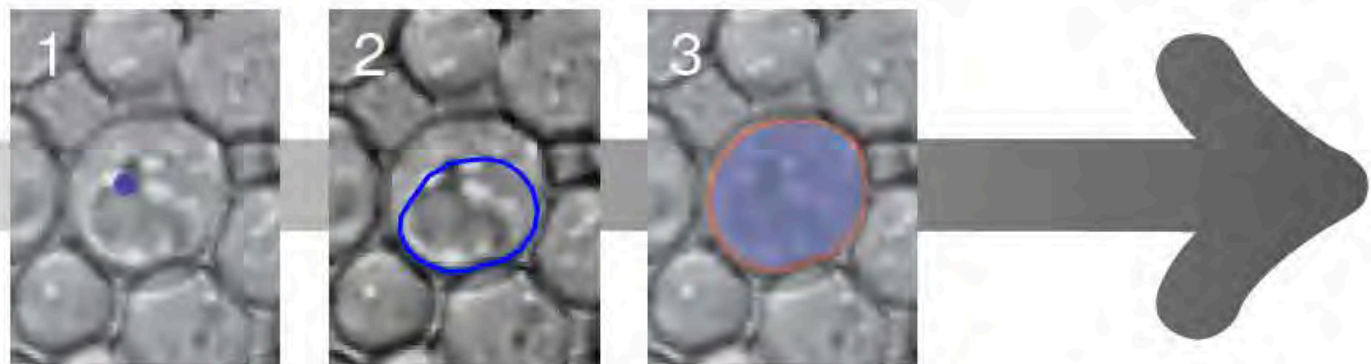
- ▶ Helligkeits- und Differenzenbasierte Randdetektion



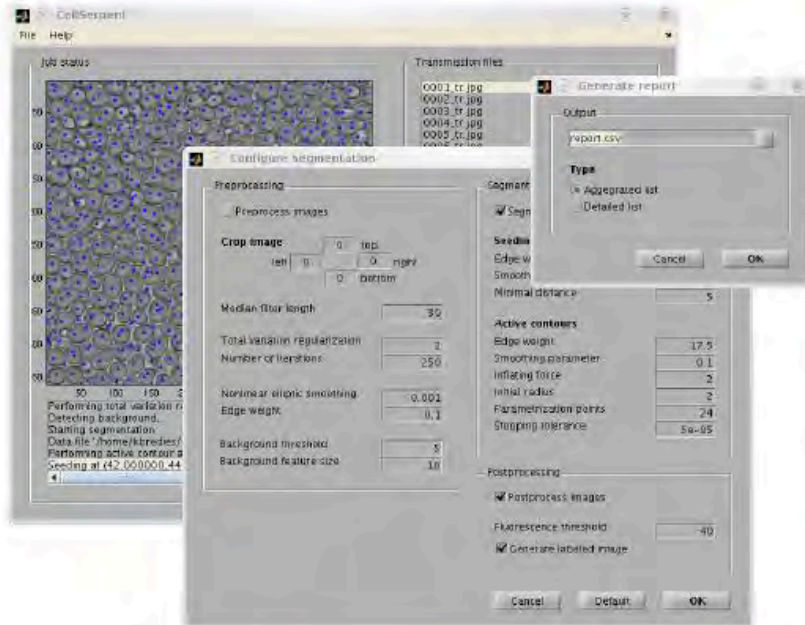
## “Snake”-Modell

- ▶ Zellränder durch numerische Optimierung

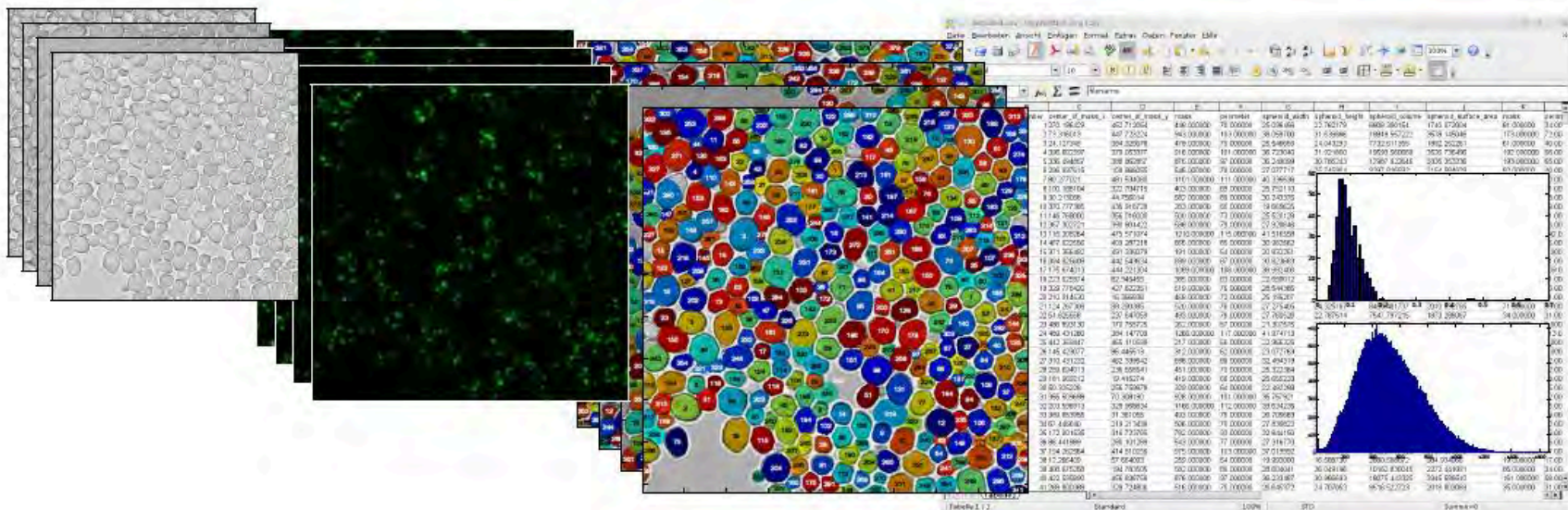
$$\min_{\gamma} \int_{S^1} G(\gamma(t)) + \alpha |\gamma'(t)|^2 dt - \left( \frac{\beta}{2} \int_{S^1} \gamma(t) \cdot \gamma'(t)^\perp dt \right)^p$$



# Integration in die Datenverarbeitungs-pipeline

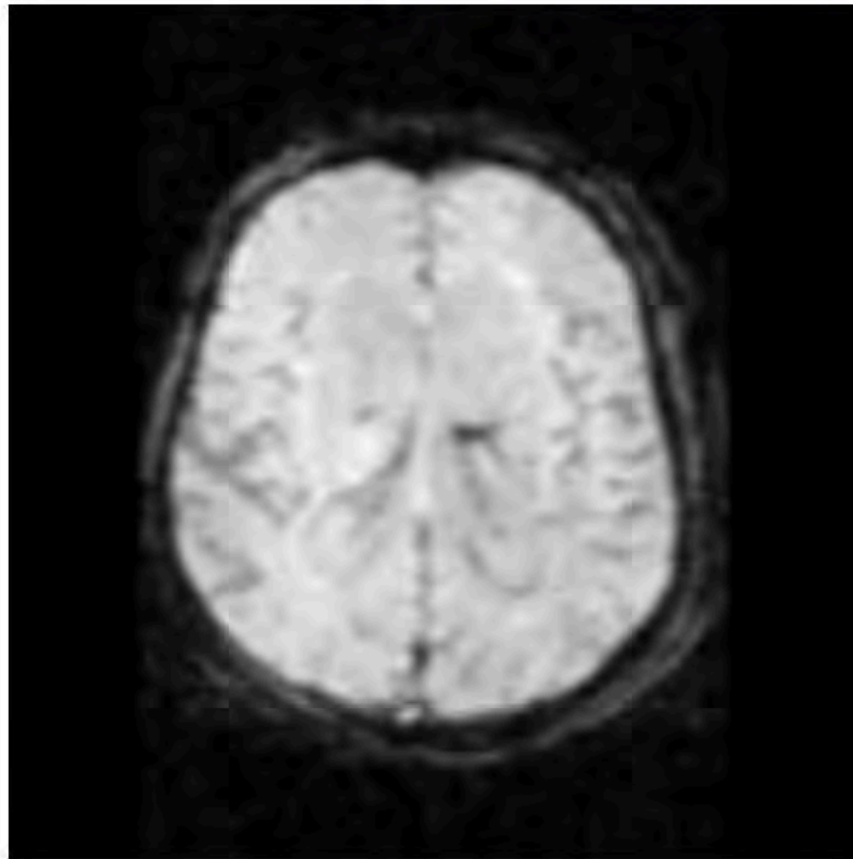


- ▶ Software zur automatisierten Segmentierung von Mikroskopiedaten
- ▶ Verarbeitung von großen Datensätzen (1000+)
- ▶ Zellbasierte quantitative Auswertung möglich

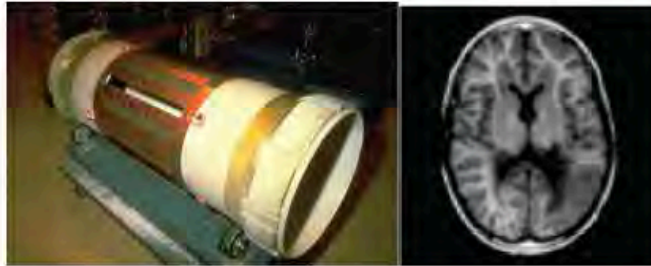


# Bildrekonstruktion für Parallel Imaging in Magnetresonanz

**Ziel:** Beschleunigung der MR Datenakquisition, dynamische Untersuchungen verlangen hohe zeitliche Auflösung.



**Strategie:** Unterabtasten. **Nachteil:** Bilder werden gestört. Störungen müssen korrigiert werden.



übliche Spule



kleinere Spulen

Die kleineren Spulen messen parallel mit komplementärer Unterabtastung, aber ihre Bilder sind **moduliert**

**Strategie:** Unterabtasten. **Nachteil:** Bilder werden gestört.  
Störungen müssen korrigiert werden.



übliche Spule

kleinere Spulen

Die kleineren Spulen messen parallel mit komplementärer Unterabtastung, aber ihre Bilder sind **moduliert und gefaltet**.

**Strategie:** Unterabtasten. Nachteil: Bilder werden gestört.  
Störungen müssen korrigiert werden.



übliche Spule

kleinere Spulen

Die kleineren Spulen messen parallel mit komplementärer Unterabtastung, aber ihre Bilder sind **moduliert und gefaltet**. Durch **Minimierung** eines ausgewählten Funktionals:

$$J(I, \sigma_i) = \sum_i \int_{\Omega} |P(\sigma_i I) - I_i|^2 + \nu \int_{\Omega} |D^2 \sigma_i|^2 + \int_{\Omega} \phi(|DI|^2)$$



**Strategie: Unterabtasten.** Nachteil: Bilder werden gestört.  
Störungen müssen korrigiert werden.



übliche Spule



kleinere Spulen

Die kleineren Spulen messen parallel mit komplementärer Unterabtastung, aber ihre Bilder sind **moduliert und gefaltet**. Durch **Minimierung** eines ausgewählten Funktionals:



moduliert und gefaltet

rekonstruiert

Beitrag der Mathematik - scientific computing:...

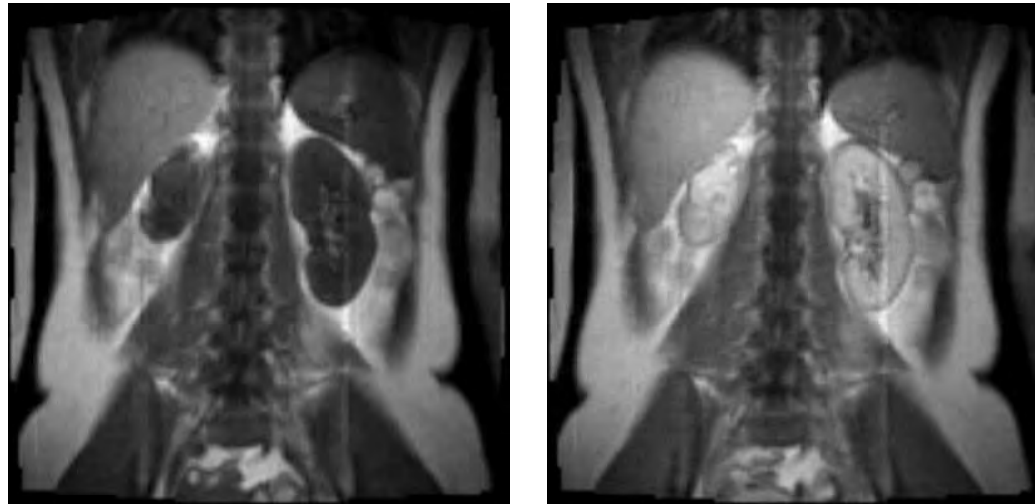
# Registrierung von Bilderfolgen

**Ziel:** Die **Bewegung** in der Folge zu entfernen, einzelne Gewebepunkte müssen untersucht werden.



**Gesucht** wird eine hinreichend glatte **Transformation** oder **Registrierung**, die einen Gewebepunkt in einem Bild mit seiner Stelle in einem anderen Bild verbindet.

Eine **Herausforderung**: Welches **Ähnlichkeitsmaß** verbindet ein Gewebepunkt vor und nach Kontrastmittel?



vor Kontrastmittel    nach Kontrastmittel

Durch **Minimierung** eines ausgewählten Funktionals:

$$\int_{\Omega} |I_0(Id + u) - R(I_1)|^2 + \int_{\Omega} (\lambda |\nabla \cdot u|^2 dx + \frac{\mu}{2} |\nabla u + (\nabla u)^T|^2) dx$$

Mathematik lässt sich nicht auf eine  
Hilfswissenschaft der Wirtschaft, Industrie,  
Physik, . . . reduzieren, ja sie muss sich hüten,  
auf eine solche reduziert zu werden, in ihrem  
eigenen Interesse, aber auch im Interesse  
der Anwendungen.

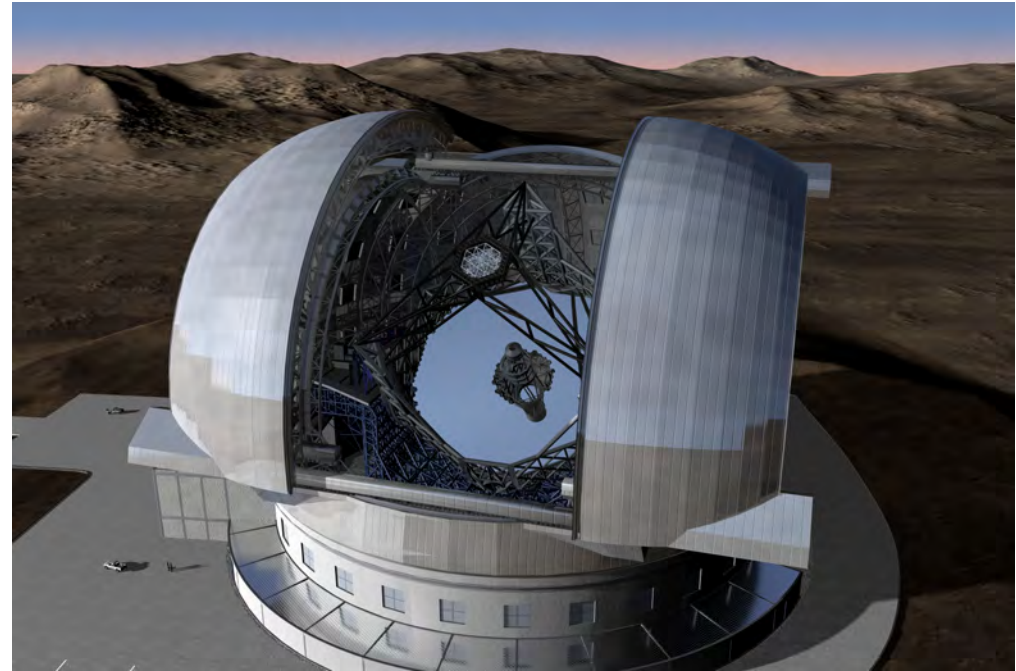
## ESO - *Fast algorithms for adaptive optics*

- ▶ ESO - European Southern Observatory
- ▶ operates several astronomical telescopes, e.g, in the Atacama desert, Chile (VLT, Cerro Paranal, 4x8m)



## Fast algorithms for Adaptive Optics

- ▶ July 2008: Austria joins ESO
- ▶ Austrian scientific contribution:  
*Mathematical Algorithms and software for E-ELT adaptive Optics*
- ▶ Project start: Oct. 2009



European Extremely Large Telescope  
(E-ELT, 40m)

- turbulences in the atmosphere lead to degraded images
- AO: hardware based correction for image improvement

# Austrian Adaptive Optics Team

## **Project Board**

Prof. R. Ramlau  
(Indmath)

Prof. H. Engl  
(RICAM/Univ.  
Vienna)

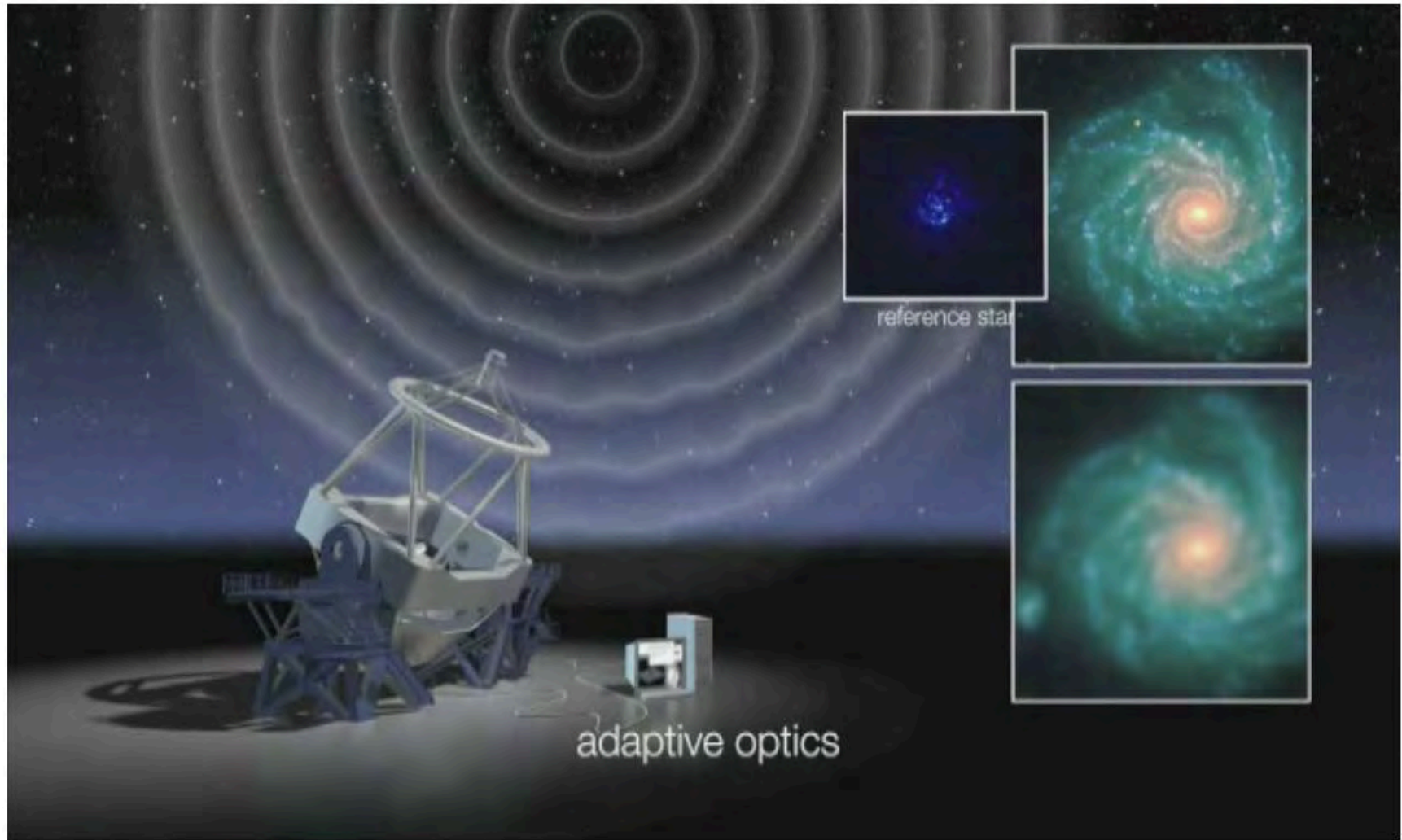
Dr. A. Binder  
(Mathconsult,  
Linz)



**Johann Radon Institute**

**Industrial Mathematics Institute**

**Industrial Mathematics  
Competence Center**

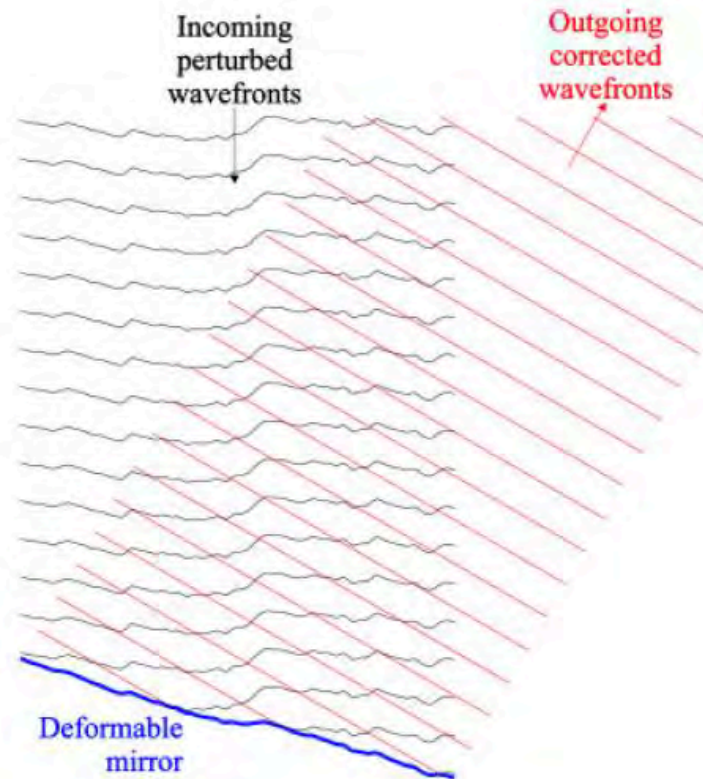
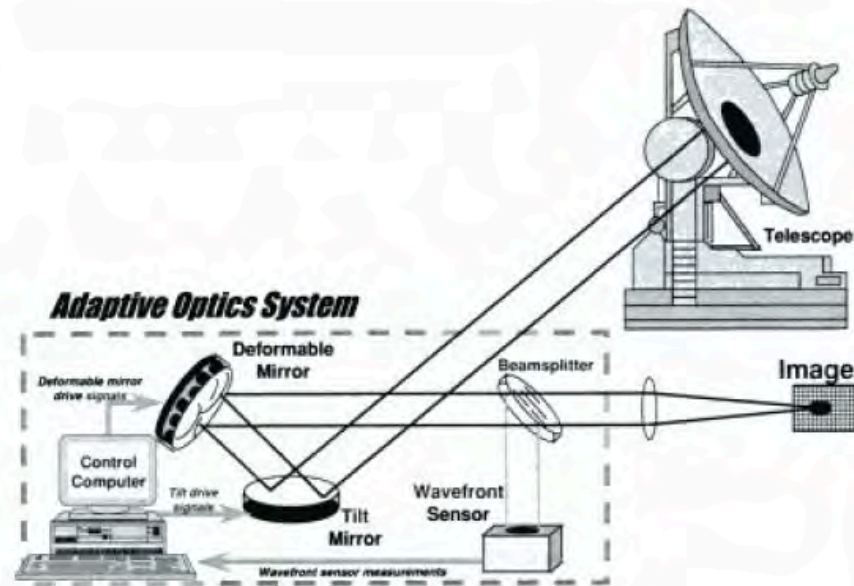


reference star

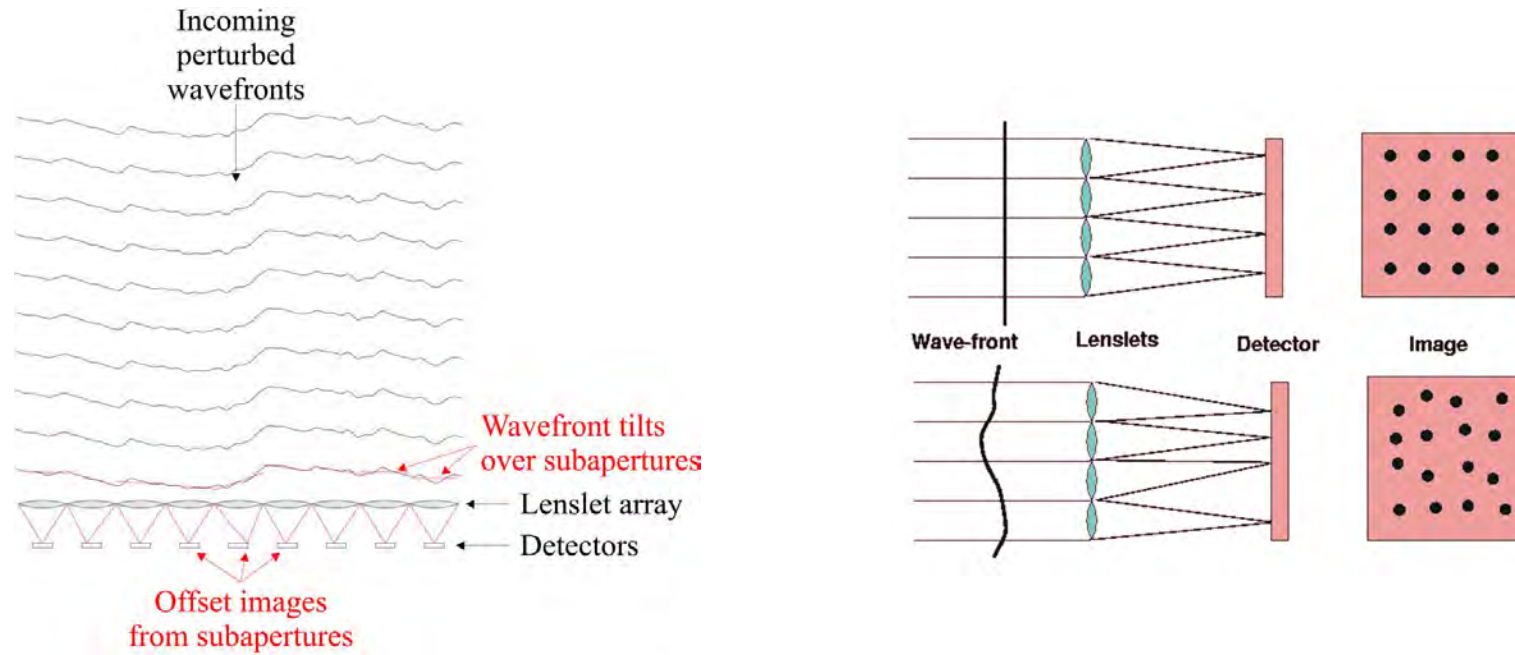
adaptive optics



# Single Conjugated Adaptive Optics



# Measurements from a Shack - Hartmann Sensor



$$data = (K\Phi)(i, j) := \left( \int_{\Omega_{ij}} \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, y) dx dy, \int_{\Omega_{ij}} \frac{\partial}{\partial y} \Phi(x, y) dx dy \right)$$

$\Phi$  ... Phasen der Wellenfront

$$K\varphi = data$$

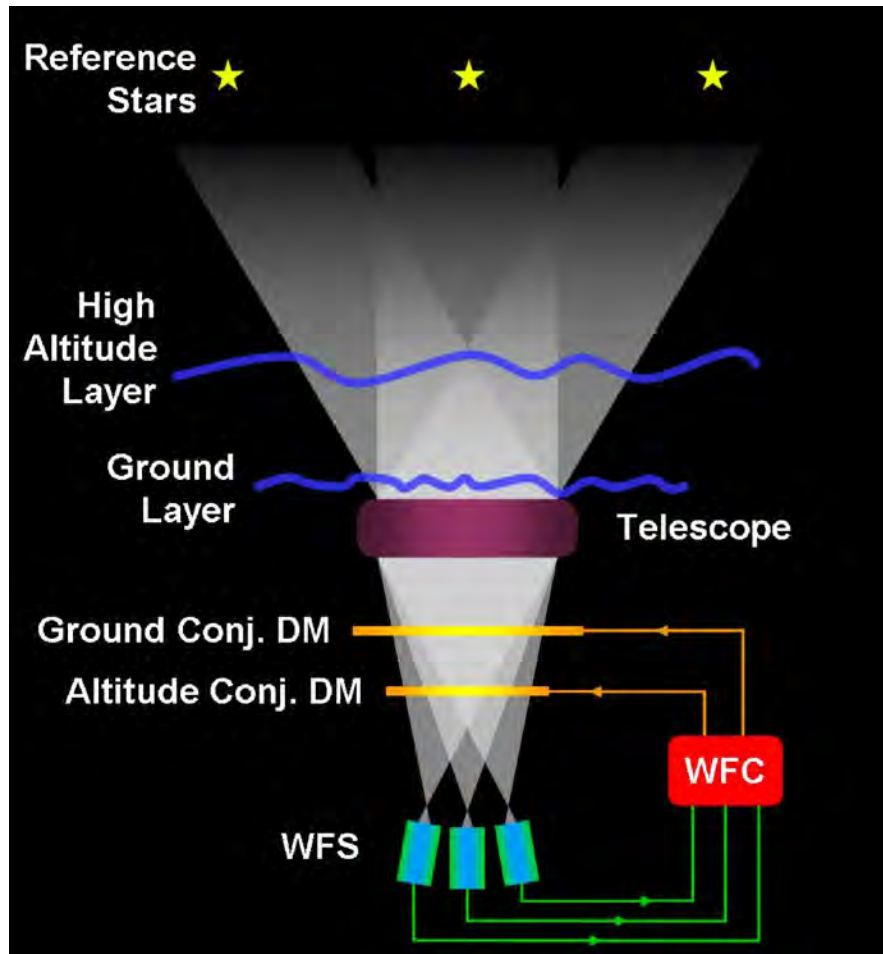
Inverse Problem, ill-conditioned

## Calculation time for the ELT

Reconstructor	Calculation time
MVM	8ms (20 Cores)
FRIM	600 $\mu s$ (1 Core)
FTR	190 $\mu s$ (8 Cores)
CuRe-Linz	61 $\mu s$ (8 Cores)

CuRe cumulative reconstructor

## Multi-conjugate adaptive optics (MCAO)



The MCAO system utilizes **several guide stars** each assigned with a WFS and **several deformable mirrors.**

dimension:

$$(\text{dim WFS})^2 \times (\# \text{ WFS}) \\ \times (\text{dim DM})^2 \times (\# \text{ DMs})$$

$$\text{E-ELT} \sim 6 * 10^8$$

$$\text{reconstruction} \sim 2ms,$$

Zum Schluß

Weil 'es' interessant und nützlich ist, wollen wir verstehen.

# Diverses

- ▶ Grundlagen - Rüstzeug
- ▶ Erstellen, Bewerten von Modellen
- ▶ Entwurf und Umsetzung numerischer - algorithmischer Verfahren
- ▶ Internationale Gruppe von post-docs
- ▶ Modellierung verschiedenster realwissenschaftlicher Disziplinen
- ▶ Gegenüberstellung zu empirischer Arbeitsweise und Forschung
- ▶ Quantitative Beschreibung, Analyse und Entscheidungsfindung. Roboter, Automobil, personalisierte Medizin
- ▶ Grundhaltung der politischen Entscheidungsträger gegenüber Formalwissenschaften
- ▶ Transfergruppen
- ▶ Zeitfaktor